

2f MA årsprøve 30.05.2024

Opgavesættet består af 2 dele.

1. del kl. 9.00-11.00 besvares i hånden med formelsamling (OBS: se indstiksark til formelsamlingen om sandsynlighedsregning på s. 3)

2. del kl. 11.00-14.00 besvares med alle hjælpemidler.

Kommunikation og internet er ikke tilladt på noget tidspunkt.

Opgavesættet består af i alt 12 opgaver og begge delprøver udleveres fra start.

Pointene er fordelt med 120 i 1. delprøve og 130 i 2. delprøve.

Lærer: CP, Solrød Gymnasium

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. I bedømmelsen af helhedsindtrykket af besvarelsen af de enkelte opgaver lægges særlig vægt på følgende fire punkter:

- *Redegørelse og dokumentation for metode* Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte løsningsstrategi med dokumentation i form af et passende antal mellemregninger eller matematiske forklaringer på metoden, når et matematisk værktøjsprogram anvendes.
- *Figurer, grafer og andre illustrationer* Besvarelsen skal indeholde hensigtsmæssig brug af figurer, grafer og andre illustrationer, og der skal være tydelige henvisninger til brug af disse i den forklarende tekst.
- *Notation og layout* Besvarelsen skal i overensstemmelse med god matematisk skik opstilles med hensigtsmæssig brug af symbolsprog. Hvis der anvendes matematisk notation, der ikke hører til standardviden, skal der redegøres for betydningen.
- *Formidling og forklaring* Besvarelsen af rene matematikopgaver skal indeholde en angivelse af givne oplysninger og korte forklaringer knyttet til den anvendte løsningsstrategi beskrevet med brug af almindelig matematisk notation. Besvarelsen af opgaver, der omhandler matematiske modeller, skal indeholde en kort præsentation af modellens kontekst, herunder betydning af modellens parametre. De enkelte delspørgsmål skal afsluttes med en præcis konklusion præsenteret i et klart sprog i relation til konteksten.

Indstiksark til formelsamlingen

Udfaldsrum U med n udfald	F(1)	$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$
Hændelse A med k udfald fra U	F(2)	$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$
Sandsynlighed for hændelse A	F(3)	$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k)$
<i>Symmetrisk sandsynlighedsfelt</i>		
Alle sandsynligheder er lige store	F(4)	$P(u_1) = P(u_2) = \dots = P(u_n) = \frac{1}{n}$
Sandsynlighed for hændelse A	F(5)	$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{antal gunstige}}{\text{antal mulige}}$
<i>Regneregler i sandsynlighedsfelt</i>		
Sandsynlighed for komplementær-hændelsen $\bar{A}$ til A	F(6)	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
Sandsynlighed for foreningshændelse	F(7)	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
<i>Betinget sandsynlighed</i>		
Definition på betinget sandsynlighed	F(8)	$P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Loven om total sandsynlighed	F(9)	$P(B) = P(B A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B A_k) \cdot P(A_k)$
Bayes' sætning	F(10)	$P(A B) = \frac{P(B A) \cdot P(A)}{P(B)}$
Bayes' udvidede sætning	F(11)	$P(A_i B) = \frac{P(B A_i) \cdot P(A_i)}{P(B A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B A_k) \cdot P(A_k)}$

Delprøve 1 kl. 9.00-11.00

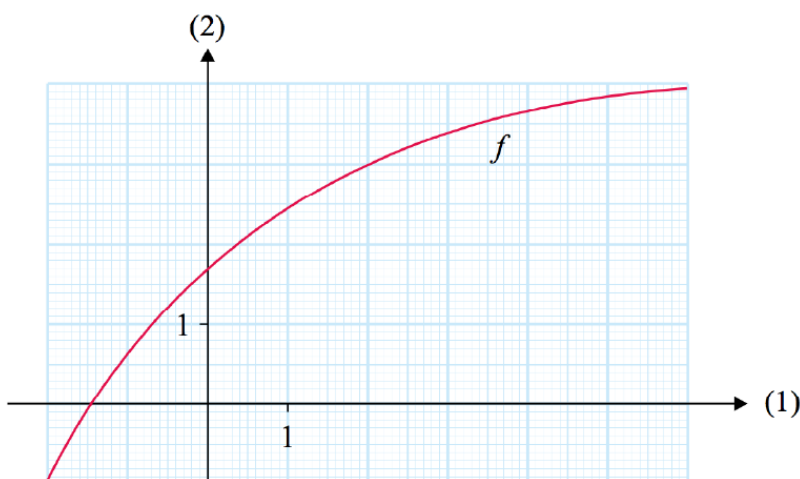
Opgave 1 En funktion f er givet ved

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot (3x^2 - 12)$$

(10 point) a) Bestem $f'(x)$.

(10 point) b) Løs ligningen $f(x) = 0$.

Opgave 2 Figuren viser grafen for en funktion f , der har en invers funktion f^{-1} .



Til opgaven
hører et bilag.

(10 point) a) Bestem $f^{-1}(3)$, og løs ligningen $f^{-1}(x) = 1$.

Opgave 3 Fra en bestemt producent af cornflakes kan vægten af pakker med cornflakes beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X med middelværdi $\mu = 500$ g og $\sigma = 8$ g.

(10 point) a) Bestem intervallet for de normale udfald for vægten af pakker med cornflakes.

(10 point) b) Bestem sandsynligheden for, at en pakke med cornflakes vejer mellem 492 g og 516 g.

Opgave 4 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 3 \cdot \sin(\pi \cdot t) + 2.$$

(10 point) a) Bestem $f'(-1)$.

(10 point) b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(-1, f(1 -))$.

(10 point) b) Skitsér grafen for f i intervallet $[-2; 2]$.

Opgave 5 På et gymnasium er 45 % af eleverne 18 år eller ældre, og 20 % af eleverne, der er 18 år eller ældre, er flyttet hjemmefra. Det oplyses, at 10 % af eleverne på gymnasiet er flyttet hjemmefra.

(10 point) a) Bestem sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt elev på gymnasiet er 18 år eller ældre og flyttet hjemmefra.

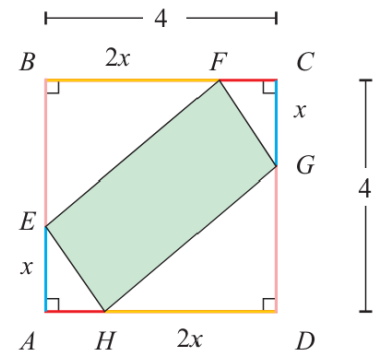
(10 point) b) Bestem sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt elev, der er flyttet hjemmefra, er under 18 år.

Opgave 6 Et kvadrat $ABCD$ har sidelængden 4. I kvadratet er der indskrevet et parallelogram $EFGH$, som vist på figuren.

(10 point) a) Gøre rede for, at arealet af parallelogrammet $EFGH$ er givet ved

$$T(x) = 4x^2 - 12x + 16.$$

(10 point) b) Bestem den værdi af x , der gør arealet af parallelogrammet mindst muligt.



Besvarelsen af 1. delprøve afleveres kl. 11.00.

Opgavesættet fortsættes på næste side.

Delprøve 2 kl. 9.00-14.00

Opgave 7 Et bryggeri har en maskine, der fylder læskedrik på flasker. Maskinen er indstillet, så den mængde læskedrik, der fyldes i en flaske, er normalfordelt med middelværdi 502 mL og spredning 3 mL.

(10 point) a) Bestem sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt flaske med læskedrik indeholder mindst 500 mL læskedrik.

Der udtages tilfældigt 20 flasker med læskedrik ud af en dags produktion. Kun 12 ud af de 20 flasker indeholder mindst 500 mL læskedrik. Dette får bryggeriet til at formode, at sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt flaske med læskedrik indeholder mindst 500 mL, ikke er $p = 74,8 \%$.

(10 point) b) Opstil en nulhypotese, der kan bruges til at teste, om bryggeriet har ret i sin formodning, og benyt et binomialtest til at undersøge, om nulhypotesen kan forkastes på et 5 % signifikansniveau.

Opgave 8 I en model kan det årlige antal fødsler i Danmark efter 2014 beskrives ved

$$N(t) = \frac{20414}{1 + 6,325 \cdot e^{-0,378 \cdot t}} + 54349$$

hvor $N(t)$ betegner det årlige antal fødsler i Danmark til tidspunktet t (målt i år efter 2014).

(10 point) a) Benyt modellen til at bestemme det årlige antal fødsler i Danmark i år 2020.

(10 point) b) Tegn grafen for $N(t)$, og forklar hvorfor 74763 er den øvre grænse for antallet af fødsler i Danmark.

(10 point) c) Bestem $N'(4)$ og giv en fortolkning af dette tal.

(10 point) d) På hvilket tidspunkt øges antallet af fødsler i Danmark mest?

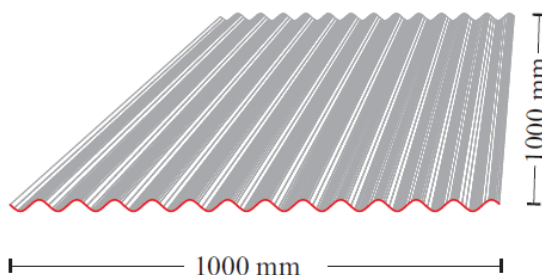
Opgave 9 En funktion f er givet ved

$$f(x) = (x + 6) \cdot (x - 2) \cdot (x - 8).$$

- (10 point) a) Bestem krumningsforholdene for f .
- (10 point) b) Bestem en ligning for de tangenter til grafen for f , der har en tangent med hældningen 4.

Opgave 10 En maskine producerer to slags batterier. På en dag producerer maskinen 1200 batterier af typen A_1 og 900 batterier af typen A_2 . Et batteri af typen A_1 er i 2,5 % af tilfældene defekte, og et batteri af typen A_2 er defekt i 1 % af tilfældene.

- (10 point) a) Bestem sandsynligheden for, at et tilfældigt valgt batteri ikke er defekt.
- (10 point) b) Bestem sandsynligheden for, at et defekt batteri er af typen A_1 .

Opgave 11

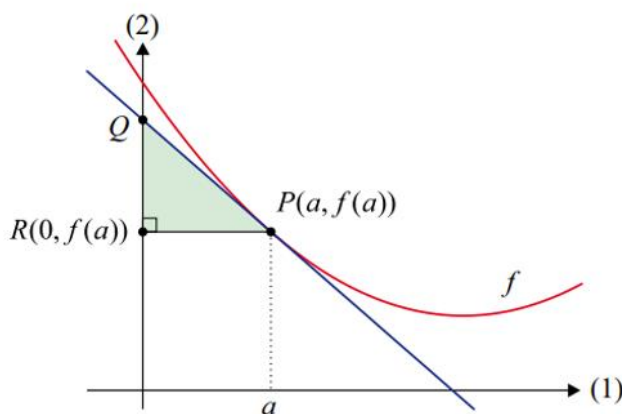
En funktion f er givet ved

$$f(x) = -9,75 \cdot \sin(0,0817 \cdot x), \text{ hvor } 0 \leq x \leq 1000.$$

I en model har den ene kant på en tagplade samme form som grafen for f . Alle mål er i mm.

- (10 point) a) Bestem den vandrette afstand mellem to toppe samt den lodrette afstand mellem top og bund på kanten af tagpladen, når tagpladen ligger på et vandret gulv.

Opgave 12



En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^2 - 10x + 25.$$

Når $0 < a < 5$ afgrænser tangenten til grafen for f i punktet $P(a, f(a))$ sammen med andenaksen og linjen med ligningen $y = f(a)$ en trekant PQR i første kvadrant (se figur).

- (10 point) a) Bestem koordinatsættet til punktet Q udtrykt ved a , og gør rede for, at arealet af trekant PQR som funktion af a er bestemt ved

$$T(a) = 5a^2 - a^3, \quad 0 < a < 5.$$

- (10 point) b) Bestem den værdi af a , der gør arealet af trekant PQR størst muligt.

Bilag til opgave 2**Opgave 2**